Campos vectoriales conservativos

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Para todo camino cerrado γ en A se verifica que $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} = 0$.

b) Cualesquiera sean los caminos γ_1 y γ_2 en A con iguales puntos iniciales y finales se verifica que $\displaystyle\int_{\gamma_1} \mathbf{F} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}$.

c) Hay un campo escalar $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F}(x) = \nabla f(x)$ para todo $x \in A$.

Cuando se cumple una cualquiera de estas afirmaciones (en cuyo caso se cumplen todas) se dice que el campo $\mathbf{F}$ es **conservativo en** A.

Si $\mathbf{F}$ es **conservativo en un dominio** A, el campo escalar $f : A \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F}(x) = \nabla f(x)$ para todo $x \in A$ está determinado de manera única salvo una constante aditiva y se llama una **función potencial** de $\mathbf{F}$ en A. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es un camino en A, se verifica que

$$\boxed{\int_\gamma \mathbf{F} = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)}$$

Ejemplo

El campo eléctrico producido por una carga puntual Q situada en un punto (a,b,c) viene dado por

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{(x-a, y-b, z-c)}{\big((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\big)^{3/2}}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a,b,c)\}$$

Es fácil comprobar que la función

$$f(x,y,z) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

es una función potencial para $\mathbf{E}$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(a,b,c)\}$.

Condiciones necesarias para que un campo sea conservativo

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1. Pongamos $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$. Condiciones **necesarias** para que $\mathbf{F}$ sea conservativo en A es que se verifiquen las igualdades

$$\boxed{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A, 1 \leqslant i < j \leqslant n} \tag{1}$$

Las condiciones necesarias (1) no son en general suficientes para asegurar que un campo que las cumpla sea conservativo en A. Cuando un campo vectorial verifica las condiciones (1) se dice que es **localmente conservativo** en el abierto A.

Condición suficiente para que un campo localmente conservativo sea conservativo

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\mathbf{F} : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 que es localmente conservativo en A. Entonces se verifica que $\mathbf{F}$ es conservativo en todo dominio simplemente conexo $D \subset A$.